Corrigé

1. Pour tout réel x, $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1 \Leftrightarrow -2 \leqslant 2\sin x \leqslant 2 \Leftrightarrow x-2 \leqslant x+2\sin x \leqslant x+2$. Donc, pour tout $x>0$, $\frac{x-2}{x} \leqslant \frac{x+2\sin x}{x} \leqslant \frac{x+2}{x}$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+2}{x} = 1$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$. De même, pour tout $x<0$, $\frac{x-2}{x} \geqslant \frac{x+2\sin x}{x} \geqslant \frac{x+2}{x}$. Or, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x-2}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x+2}{x} = 1$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$.

2. Pour tout réel x, $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \Leftrightarrow 1 \leqslant 2+\cos x \leqslant 3$. Donc pour tout $x>0$, $x^3 \leqslant (2+\cos(x))x^3 \leqslant$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ donc, d'après un théorème de comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. De même, pour tout $x<0$, $x^3 \geqslant (2+\cos(x))x^3$. Or, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ donc, d'après un théorème de comparaison, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$.

3. Pour tout réel x, $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1 \Leftrightarrow x-1 \leqslant x+\sin x \leqslant x+1$, donc, pour tout $x>1$, $\frac{1}{x-1} \geqslant \frac{1}{x+\sin x} \geqslant \frac{1}{x+1}$, car la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$, et donc $\frac{x}{x-1} \geqslant \frac{x}{x+\sin x} \geqslant \frac{x}{x+1}$, pour tout $x>1$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1} = 1$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 1$. De même, pour tout $x<-1$, $\frac{1}{x-1} \geqslant \frac{1}{x+\sin x} \geqslant \frac{1}{x+1}$,car la fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$. Donc $\frac{x}{x-1} \leqslant \frac{x}{x+\sin x} \leqslant \frac{x}{x+1}$ pour tout $x<-1$. Or, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{x-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{x+1} = 1$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = 1$.

4. Pour tout réel x, $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1 \Leftrightarrow -3 \leqslant 3\sin x \leqslant 3 \Leftrightarrow x^2-3 \leqslant 3\sin x \leqslant x^2+3$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-3 = +\infty$ donc, d'après un théorème de comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x) = +\infty$. Et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2-3 = +\infty$ donc, d'après un théorème de comparaison, $\lim\limits_{x\to-\infty} k(x) = +\infty$.